M

No. of Printed Pages : 8

Pre-Board Examination, 2015-16

Subject : Mathematics

Class : XII

Time : 3 Hrs.] **[M. M. : 100**

General Instructions :

(i) All questions are compulsory.

(ii) The question paper consists of 26 questions divided into three sections A, B and C. Section 'A' comprises of 6 questions of one mark each. Section 'B' comprises of 13 questions of four marks each. Section 'C' comprises of 7 questions of six marks each.

(iii) All questions in Section 'A' are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, an internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculator is not permitted.

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में 26 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स। खण्ड 'अ' में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड 'ब' में 13 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है तथा खण्ड 'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।

(iii) खण्ड 'अ' में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता के अनुसार दिए जा सकते हैं।

(iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं है। फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

SECTION 'A'

(खण्ड – 'अ')

1. For what value of x, the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ is skew symmetric matrix ?

   x के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ विषम सममित है ?

2. If $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 1$, then find the value of $|\vec{a} - \vec{b}|$.

   यदि $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 1$, तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. Write the equation of a line perpendicular to $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = 5$ and passing through point (1, 0, 3).

   बिन्दु (1, 0, 3) से जाने वाली तथा तल $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = 5$ पर लम्बवत् रेखा का समीकरण लिखिए।

4. If $|\vec{a}| = 3$ and $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, for what angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$?

   यदि $|\vec{a}| = 3$ और $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच किस कोण के लिए $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$ होगा ?

5. Write the integrating factor of the differential equation $x\frac{dy}{dx} = y - 2x^2$.

   अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} = y - 2x^2$ का समाकलन गुणांक लिखिए।

6. Write the sum of the order and degree of the differential equation $x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$.

   अवकल समीकरण $x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ की कोटि तथा घात का योग लिखिए।

SECTION 'B'
(खण्ड – 'ब')

7. Prove that : $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

OR

Prove that : $\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$

सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

अथवा

सिद्ध कीजिए : $\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$

8. Evaluate : $\int \frac{3x-1}{3x^2+4x+2}\,dx$

ज्ञात कीजिए : $\int \frac{3x-1}{3x^2+4x+2}\,dx$

9. Evaluate : $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}\,dx$

ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}\,dx$

10. Let $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ be unit vectors such that $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ and the angle between $\vec{b}$ and $\vec{c}$ is $\frac{\pi}{6}$, prove that :

$\vec{a} = \pm 2(\vec{b}\times\vec{c})$

माना $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इकाई सदिश हैं, दिया है $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ तथा $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच कोण $\frac{\pi}{6}$ है, सिद्ध कीजिए :

$\vec{a} = \pm 2(\vec{b}\times\vec{c})$

11. If $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$, then prove that : $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$

OR

Solve the equation : $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

यदि $y=\cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$, तो सिद्ध कीजिए : $\sin y=\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$

अथवा

समीकरण को हल कीजिए : $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

12. If $A=\begin{bmatrix}0 & 2y & z\\ x & y & -z\\ x & -y & z\end{bmatrix}$ and A'A = I, then find the value of x, y and z.

यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 2y & z\\ x & y & -z\\ x & -y & z\end{bmatrix}$ और A'A = I, तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

13. Using properties of determinants, prove that :

$$\begin{vmatrix} a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}=\left(b^2-ac\right)\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}=\left(b^2-ac\right)\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)$$

14. If $x=a\sec^3\theta, y=a\tan^3\theta$, then find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta=\frac{\pi}{4}$.

OR

Find the value of 'k' for which the function defined as

$$f(x)=\begin{cases}k\sin\left\{\frac{\pi}{2}(x+1)\right\}, & x\le 0\\ \frac{\tan x-\sin x}{x^3}, & x>0\end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

यदि $x = a \sec^3 \theta$, $y = a \tan^3 \theta$, तो $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

'k' का मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} k \sin\left\{\frac{\pi}{2}(x+1)\right\}, & x \le 0 \\ \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, & x > 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर सतत है।

15. A trust fund has ₹ 60000 that must be invested in two different types of bonds. The first bond pays 3% interest per year and the second bond pays 5% interest per year. Using matrix multiplication, determine how to divide ₹ 60000 among the two types of bonds, if the trust fund must obtain an annual total interest of ₹ 2000.

किसी व्यापार संघ के पास ₹ 60000 का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बॉण्डों में निवेशित करना है। प्रथम बॉण्ड पर 3% वार्षिक तथा द्वितीय बॉण्ड पर 5% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि ₹ 60000 के कोष को दो प्रकार के बॉण्डों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज ₹ 2000 हो।

16. If $x^y = y^x$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $x^y = y^x$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

17. Find the points on the line $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ at a distance 5 units from the point P(1, 3, 3).

बिन्दु P(1, 3, 3) से 5 इकाई की दूरी पर रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ पर बिन्दु ज्ञात कीजिए।

18. A person buys a lottery ticket in 50 lotteries, in each of which his chance of winning a prize is $\frac{1}{100}$. What is the probability that he will win a prize (a) exactly once, (b) at least once, (c) at least twice ?

एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{100}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह (a) तथ्यत: एक बार, (b) न्यूनतम एक बार, (c) न्यूनतम दो बार इनाम जीत लेगा ?

19. Find the intervals in which the function

$$f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

is (a) increasing, (b) decreasing.

OR

Using differentials, find the approximate value of $\sqrt{25.2}$.

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a) वर्धमान, (b) ह्रासमान है।

अथवा

अवकल का प्रयोग करके $\sqrt{25.2}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

SECTION 'C'

(खण्ड – 'स')

20. If lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-\lambda}{2} = \frac{z}{1}$ intersect, then find the value of λ and hence find the equation of the plane containing these lines.

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $\vec{r}.\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=1$ and $\vec{r}.\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=5$ which is perpendicular to the plane $x-y+z=0$. Then find the distance of the plane thus obtained from the point (1, 3, 6).

यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-\lambda}{2} = \frac{z}{1}$ परस्पर काटती हैं तो λ का मान ज्ञात कीजिए। अतः इन रेखाओं को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

तलों $\vec{r}.\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=1$ और $\vec{r}.\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=5$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा तल $x-y+z=0$ पर लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए। प्राप्त तल की बिन्दु (1, 3, 6) से दूरी ज्ञात कीजिए।

21. An aeroplane can carry a maximum of 200 passengers. A profit of ₹ 5000 is made on each executive class ticket and a profit of ₹ 3000 is made on each economy class ticket. The airline reserves at least 20 seats for executive class. However, at least 4 times as many passengers prefer to travel by economy class then by the executive class. Determine how many tickets of each type must be sold in order to maximise the profit for the airline. What is the maximum profit ? Form a LPP from the above & solve it graphically.

एक हवाई जहाज अधिकतम 200 यात्रियों को यात्रा करा सकता है। प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर ₹ 5000 और सस्ते श्रेणी के टिकट पर ₹ 3000 का लाभ कमाया जा सकता है। एअरलाइन कम से कम 20 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती है। तथापि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम से कम 4 गुने यात्री सस्ती श्रेणी के टिकट से यात्रा करने की वरीयता देते हैं। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ ताकि लाभ का अधिकतमीकरण हो? अधिकतम लाभ कितना है? रेखीय प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ से हल कीजिए।

22. Find the particular solution of the differential equation : $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$:

$y = 2$ when $x = 1$

अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए : $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$

दिया है जब $x = 1$ तो $y = 2$

23. Consider $f: \mathrm{N} \to$ Range f given by $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$. Show that f is invertible. Find f^{-1}.

$f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathrm{N} \to$ Range f पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f^{-1} ज्ञात कीजिए।

24. An insurance company insured 2000 cyclists, 4000 scooter drivers and 6000 motor bike drivers. The probability of an accident involving a cyclist, scooter driver and a motor bike driver are 0.01, 0.03 and 0.15 respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that he is a scooter driver ? Which mode of transport would you suggest to a student and why ?

एक बीमा कम्पनी 2000 साइकिल सवारों, 4000 स्कूटर चालकों तथा 6000 मोटर बाइक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकता क्रमशः 0.01, 0.03 तथा 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों में एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है? एक विद्यार्थी को आप किस यातायात के साधन की सलाह देंगे तथा क्यों ?

25. A wire of length 28 m is to be cut into two pieces. One of the pieces is to be made into a square and the other into a circle. What should be the length of the two pieces so that the combined area of the square and the circle is minimum ?

एक 28 सेमी. लम्बे तार को दो टुकड़ों में बाँटा जाता है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग तथा वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो ?

26. Using integration, find the area of the region $\left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \le x + \frac{y}{2}, x, y \in R\right\}$.

OR

Using integration, find the area of the region bounded by the lines $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ and $x - 5y + 9 = 0$.

P.T.O.

एक हवाई जहाज अधिकतम 200 यात्रियों को यात्रा करा सकता है। प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर ₹ 5000 और सस्ते श्रेणी के टिकट पर ₹ 3000 का लाभ कमाया जा सकता है। एअरलाइन कम से कम 20 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती है। तथापि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम से कम 4 गुने यात्री सस्ती श्रेणी के टिकट से यात्रा करने की वरीयता देते हैं। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ ताकि लाभ का अधिकतमीकरण हो? अधिकतम लाभ कितना है? रेखीय प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ से हल कीजिए।

22. Find the particular solution of the differential equation : $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$:

$y = 2$ when $x = 1$

अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए : $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$

दिया है जब $x = 1$ तो $y = 2$

23. Consider $f: \mathrm{N} \to$ Range f given by $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$. Show that f is invertible. Find f^{-1}.

$f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathrm{N} \to$ Range f पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f^{-1} ज्ञात कीजिए।

24. An insurance company insured 2000 cyclists, 4000 scooter drivers and 6000 motor bike drivers. The probability of an accident involving a cyclist, scooter driver and a motor bike driver are 0.01, 0.03 and 0.15 respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that he is a scooter driver ? Which mode of transport would you suggest to a student and why ?

एक बीमा कम्पनी 2000 साइकिल सवारों, 4000 स्कूटर चालकों तथा 6000 मोटर बाइक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकता क्रमशः 0.01, 0.03 तथा 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों में एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है? एक विद्यार्थी को आप किस यातायात के साधन की सलाह देंगे तथा क्यों ?

25. A wire of length 28 m is to be cut into two pieces. One of the pieces is to be made into a square and the other into a circle. What should be the length of the two pieces so that the combined area of the square and the circle is minimum ?

एक 28 सेमी. लम्बे तार को दो टुकड़ों में बाँटा जाता है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग तथा वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो ?

26. Using integration, find the area of the region $\left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \le x + \frac{y}{2}, x, y \in R\right\}$.

OR

Using integration, find the area of the region bounded by the lines $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ and $x - 5y + 9 = 0$.

P.T.O.

समाकलन के प्रयोग से $\left\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1 \leq x + \frac{y}{2}, x, y \in R\right\}$ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

समाकलन के प्रयोग से, रेखाओं $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 3y - 21 = 0$ तथा $x - 5y + 9 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।